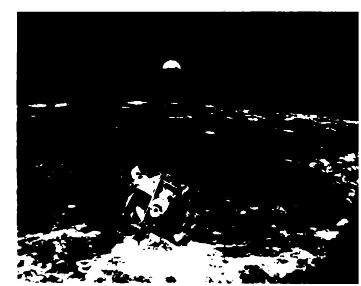
QUADRATISCHE GLEICHUNGEN UND FUNKTIONEN

Als Neil A. ARMSTRONG, der 38jährige Kommandant der Apollo 11, am 20. Juli 1969 als erster Mensch den Mond betrat, kommentierte er diesen historischen Moment: *„That's one small step for a man, one giant leap for mankind."*[1]

Ein jahrhundertelanger Traum der Menschheit hatte sich erfüllt; ein Jahrzehnt der Vorbereitung und ein vier Tage langer Flug waren notwendig gewesen, bis es ARMSTRONG und seine Mannschaft geschafft hatten.



Das nebenstehende Foto zeigt Neil ARMSTRONG und Edwin ALDRIN bei ihrem historischen ersten Mondspaziergang: Im Helmvisier von Edwin ALDRIN spiegeln sich die Silhouette seines Kollegen ARMSTRONG, die Kamera der Astronauten sowie Teile der Mondlandefähre. Im Vordergrund sind die Fußspuren der beiden Astronauten im Mondstaub zu sehen.



Ein gewaltiges Stück Mathematik war notwendig, um die Apollo-Mission durchzuführen. Eine kleine Aufgabe wollen wir aus der komplexen Problematik herausgreifen:

Auf dem Weg von der Erde zum Mond erreichten die Astronauten einen Punkt im All, in dem das Apollo-Raumschiff von der Masse der Erde und des Mondes gleich stark angezogen wurde. Wo liegt dieser Punkt im All? Um ihn zu berechnen, muß man eine sogenannte **„quadratische Gleichung"** lösen. Zahlreiche Probleme der Technik und Wirtschaft führen auf derartige Gleichungen. Die Lösung derselben ist das Thema dieses Kapitels.

Die folgende Fotomontage zeigt einige Himmelskörper unseres Sonnensystems:



[1]) „Ein kleiner Schritt für einen Menschen, ein großer Schritt für die Menschheit."

Die Welt der technischen Probleme ist von ungeheurer Vielfalt. Rahmenträger und Fachwerke können ebenso wie elektrische Netzwerke mit einem weitreichenden mathematischen Werkzeug behandelt werden: mit linearen Gleichungen bzw. linearen Gleichungssystemen. Die Lösung linearer Gleichungssysteme mag viele Rechenschritte erfordern, der Vorgang ist prinzipiell einfach. Freilich reicht es nicht, nur lineare Gleichungen bzw. lineare Gleichungssysteme zu lösen. Zahlreiche Problemstellungen führen auf nichtlineare Gleichungen. Die einfachste Nichtlinearität ist die quadratische Funktion. Wer mit quadratischen Gleichungen umgeht, hat die Welt der Nichtlinearität betreten. Der Eintrittspreis verlangt etwas Mühe: zumindest eine Formel muß auswendig gekonnt werden, um **jede** quadratische Gleichung schnell und sicher zu lösen. Wichtiger aber ist das Verständnis, daß für eine Fragestellung mit nur **einer** Variablen mitunter **zwei** verschiedene Lösungen erhalten werden. Welche ist auszuwählen? Diese Frage ist mathematisch nicht zu beantworten, die Antwort ergibt sich aus der Aufgabenstellung. Damit werden wir uns später — im Rahmen von **Textgleichungen** — noch ausführlich beschäftigen.

1. Quadratische Gleichungen in einer Variablen

1.1 Reinquadratische Gleichungen

Beispiele für reinquadratische Gleichungen: $3x^2 + 4 = 0$; $5x^2 = 0$; $2x^2 - 18 = 0 \ldots$

Eine reinquadratische Gleichung hat die Form $ax^2 + c = 0$ $(a, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$

Beispiel:

Die Gleichung **a)** $3x^2 + 7 = 0$ **b)** $4x^2 = 0$ **c)** $2x^2 - 18 = 0$ ist in $\mathbb{R}$ zu lösen!

Lösung:

a) $3x^2 + 7 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{7}{3}$. Das Quadrat einer reellen Zahl ist niemals negativ! $\mathbf{L} = \{\}$

b) $4x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0$. Das Quadrat jeder reellen Zahl aus $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist von 0 verschieden, die einzige Lösung ist deshalb 0! $\mathbf{L} = \{0\}$

Probe!

c) $2x^2 - 18 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-3) = 0$. Ein Produkt ist genau dann gleich null, wenn mindestens einer der Faktoren null ist!

$x + 3 = 0 \quad \vee \quad x - 3 = 0$

$\mathbf{x = -3} \qquad \mathbf{x = 3}$

$\mathbf{L} = \{3, -3\}$ **Probe!**

Beispiel:

Man ermittle die Lösungsmenge der Gleichung $\frac{1}{8x} + 2x = 0$; $G = \mathbb{R}$.

Lösung:

Zunächst wird die Definitionsmenge D bestimmt: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\frac{1}{8x} + 2x = 0 \Leftrightarrow 1 + 16x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{1}{16}$. Somit gilt: $\mathbf{L} = \{\}$

Beispiel:

$\frac{x+3}{x-3} + \frac{x-3}{x+3} = \frac{36}{x^2-9}$ ist in $\mathbb{R}$ zu lösen!

Lösung:

$D = \mathbb{R} \setminus \{3, -3\}$ (Warum?)

$\frac{x+3}{x-3} + \frac{x-3}{x+3} = \frac{36}{x^2-9} \Leftrightarrow (x+3)^2 + (x-3)^2 = 36 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + x^2 - 6x + 9 = 36 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Rightarrow \mathbf{x_1 = 3} \quad \mathbf{x_2 = -3}$

Die gefundenen Werte sind keine Elemente der Definitionsmenge! $\mathbf{L} = \{\}$

Beispiel:

Man löse $\frac{3x-10}{x-2} - 1 = \frac{x-4}{x+1}$ in $\mathbb{Q}$!

Lösung:

$D = \mathbb{Q} \setminus \{2, -1\}$

$\frac{3x-10}{x-2} - 1 = \frac{x-4}{x+1} \Leftrightarrow (3x-10)(x+1) - (x-2)(x+1) = (x-4)(x-2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 7x - 10 - x^2 + x + 2 = x^2 - 6x + 8 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Rightarrow \mathbf{x_1 = 4} \quad \mathbf{x_2 = -4}$

Probe:

$T_L(4) = 0 \quad T_R(4) = 0 \quad T_L(-4) = \frac{8}{3} \quad T_R(-4) = \frac{8}{3} \quad T_L = T_R$ (w) Somit gilt: $\mathbf{L} = \{4, -4\}$

1.2 Gemischtquadratische Gleichungen

Beispiele für gemischtquadratische Gleichungen:

(1) $3x^2 - 4x = 0$; $x^2 - 9x = 0$; $2x^2 - x = 0\ldots$

(2) $x^2 - 5x + 6 = 0$; $3x^2 + 5x - 1 = 0$; $x^2 - x + 99 = 0\ldots$

Welcher Unterschied besteht zwischen den in **(1)** und den in **(2)** angeführten gemischtquadratischen Gleichungen?
Nun: bei **(1)** haben die Gleichungen die Form $ax^2 + bx = 0$ $(a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$; hingegen haben die Gleichungen bei **(2)** die Form $ax^2 + bx + c = 0$ $(a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$.
Dieser Unterschied wirkt sich auf den einzuschlagenden Lösungsweg aus:

Beispiel:

Die Gleichung **a)** $x^2 - 9x = 0$ **b)** $5x^2 - 7x = 0$ ist in $\mathbb{R}$ zu lösen!

Lösung:

a) $x^2 - 9x = 0 \Leftrightarrow x(x-9) = 0$ (1)
$x = 0 \vee x - 9 = 0$ (2)
$x_1 = 0 \quad x_2 = 9$
Probe! $L = \{0, 9\}$

b) $5x^2 - 7x = 0 \Leftrightarrow x(5x-7) = 0$ (1)
$x = 0 \vee 5x - 7 = 0$ (2)
$x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{7}{5}$
Probe! $L = \left\{0, \frac{7}{5}\right\}$

(1) x wird herausgehoben!
(2) Ein Produkt von Termen ist genau dann gleich null, wenn mindestens einer der Faktoren null ist.

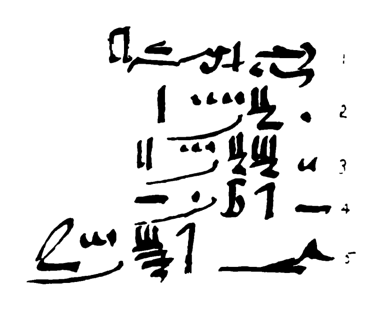
Gewisse gemischtquadratische Gleichungen können wie reinquadratische Gleichungen gelöst werden.
Z.B.: $x^2 + 4x + 4 = 16 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 16 \Leftrightarrow x + 2 = \pm 4 \quad x_1 = 2 \quad x_2 = -6$
Die Grundidee besteht dabei in der Umwandlung des Trinoms $x^2 + 4x + 4$ in ein vollständiges Quadrat $(x+2)^2$ nach der Formel $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$.

Die quadratische Ergänzung findet man, indem man das Quadrat aus dem halben Koeffizienten des linearen Gliedes bildet.

Diese Formel kann man ausnützen, um zweigliedrige Terme $x^2 + px$ zu einem vollständigen Quadrat zu ergänzen.

Ausdruck	quadratische Ergänzung	Vollständiges Quadrat
$x^2 + 19x$	$\left(\frac{19}{2}\right)^2$	$x^2 + 19x + \left(\frac{19}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{19}{2}\right)^2$
$x^2 - 5x$	$\left(\frac{5}{2}\right)^2$	$x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2$
$x^2 + px$	$\left(\frac{p}{2}\right)^2$	$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$

Die Lösung quadratischer Gleichungen hat eine uralte Geschichte. Vielleicht ist die Beschäftigung mit quadratischen Gleichungen aus der Freude des Menschen an Erkenntnis entstanden. Aufgrund der Landesvermessung nach den jährlichen Nilüberschwemmungen ergab sich freilich auch die Notwendigkeit, sich mit quadratischen Gleichungen zu befassen. Der Papyrus Rhind aus dem alten Ägypten beinhaltet jedenfalls bereits spezielle quadratische Gleichungen:



Wenn man z. B. die Gleichung $x^2 + 19x + 84 = 0$ lösen möchte, kann man folgenden Weg einschlagen:

$$x^2 + 19x + 84 = 0 \Leftrightarrow (1)\ x^2 + 19x = -84 \Leftrightarrow (2)\ x^2 + 19x + \left(\frac{19}{2}\right)^2 = \left(\frac{19}{2}\right)^2 - 84 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3)\ \left(x + \frac{19}{2}\right)^2 = \left(\frac{19}{2}\right)^2 - 84$$

$$x + \frac{19}{2} = +\sqrt{\frac{361}{4} - 84} \vee x + \frac{19}{2} = -\sqrt{\frac{361}{4} - 84} \ldots x_1 = -7 \quad x_2 = -12 \quad \textbf{Probe!}$$

Dieser Lösungsweg läßt sich immer durchführen. Um allgemein $x^2 + px + q = 0$ zu lösen, gehen wir analog vor:

$$x^2 + px + q = 0 \Leftrightarrow (1)\ x^2 + px = -q \Leftrightarrow (2)\ x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3)\ \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

Die **allgemeine Form** der quadratischen Gleichung lautet

$ax^2 + bx + c = 0$ $(a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$.

Dividieren wir diese allgemeine Form durch den Koeffizienten a:
$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$, und setzen wir schließlich $\frac{b}{a} = p$ und $\frac{c}{a} = q$, so erhalten wir die **Normalform** der quadratischen Gleichung:
$x^2 + px + q = 0$

Wenn wir nun in
$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ für $p = \frac{b}{a}$
und $q = \frac{c}{a}$ setzen, so ergibt sich:

$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} \Leftrightarrow x_{1,2} = \ldots$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Den Ausdruck $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ nennt man **Diskriminante D**. Wir können folgende Fälle unterscheiden:

- **$D < 0$:** Das Quadrat einer reellen Zahl ist niemals negativ! $\Rightarrow$ **$L = \{\}$**
- **$D = 0$:** Wir erhalten die doppelt zu zählende Lösung
  $x_1 = x_2 = -\frac{p}{2} \Rightarrow L = \left\{-\frac{p}{2}\right\}$
- **$D > 0$:** $\left(x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) \vee \left(x + \frac{p}{2} = -\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)$

  Wir erhalten also zwei Lösungen:

  $x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ $\quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

  $\Rightarrow L = \left\{-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},\ -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right\}$

Kurzschreibweise: $L = \left\{-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right\}$

Selbstverständlich wird man in der Praxis gleich in die sogenannte Lösungsformel $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ einsetzen und nicht den umständlichen Weg über die quadratische Ergänzung einschlagen! Dies zeigt das nächste Beispiel.

Beispiel:

Man löse **a)** $x^2 - 4x + 5 = 0$ **b)** $x^2 - 4x + 4 = 0$ **c)** $x^2 - 4x + 3$ in $\mathbb{R}$!

Lösung:

a) $x^2 - 4x + 5 = 0$

$p = -4,\ q = 5$

$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$x_{1,2} = \frac{4}{2} \pm \sqrt{\frac{16}{4} - 5}$

$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 5}$

$D < 0$: **$L = \{\}$**

b) $x^2 - 4x + 4 = 0$

$p = -4,\ q = 4$

$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$x_{1,2} = \frac{4}{2} \pm \sqrt{\frac{16}{4} - 4}$

$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 4}$

$D = 0$: **$x_1 = 2 \quad x_2 = 2 \quad L = \{2\}$**

c) $x^2 - 4x + 3 = 0$

$p = -4,\ q = 3$

$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$x_{1,2} = \frac{4}{2} \pm \sqrt{\frac{16}{4} - 3}$

$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 3}$

$D > 0$: **$x_1 = 3 \quad x_2 = 1 \quad L = \{3, 1\}$**

Man führe die Probe selbständig durch!

Wie schon früher erwähnt wurde, ist die Diskriminante D der Radikand (d. h. der unter der Wurzel stehende Ausdruck). In der obigen Lösungsformel
$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ gilt
demgemäß: $D = b^2 - 4ac$.

Beispiel:

$4x^2 - 9x + 2 = 0$ ist in $\mathbb{R}$ zu lösen!

Lösung:

Wir können die gegebene Gleichung in $x^2 - \frac{9x}{4} + \frac{1}{2} = 0$ überführen, und die Lösungsformel $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ anwenden.

Wenn der Koeffizient von x^2 ungleich 1 ist, ist es aber vorteilhafter, folgendermaßen vorzugehen:

$4x^2 - 9x + 2 = 0,\quad a = 4,\quad b = -9,\quad c = 2$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $\quad x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 32}}{8}$ $\quad x_{1,2} = \frac{9 \pm 7}{8}$

$x_1 = 2 \quad x_2 = \frac{1}{4}$ $\quad$ **Probe!** $\quad$ **$L = \left\{2, \frac{1}{4}\right\}$**

Beispiel:

Man löse $\frac{x}{2(x-2)} - \frac{4}{x+2} = \frac{1}{x-2}$ in $\mathbb{R}$!

Lösung:

$D = \mathbb{R} \setminus \{2, -2\}$

Wir multiplizieren mit $2(x-2)(x+2)$:

$x(x+2) - 8(x-2) = 2(x+2) \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8x + 16 = 2x + 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 12 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16-12}$

$\Leftrightarrow x_1 = 6 \quad x_2 = 2$

$x_2 = 2$ ist kein Element der Definitionsmenge.

Probe:

$T_L(6) = \frac{1}{4} \quad T_R(6) = \frac{1}{4} \quad T_L = T_R$ (w) Somit gilt: $L = \{6\}$

Heute bedarf es nur geringer Mühe, für eine Formel ein Computerprogramm zu entwickeln. Als Beispiel sei das LISTING für ein Computerprogramm angeführt, mit dem quadratische Gleichungen gelöst werden können:[1]

```
LIST
100 REM REELLE LOESUNGEN
110 REM EINER QUADR. GLEICHUNG
120 PRINT "P="
130 INPUT P
140 PRINT "Q:"
150 INPUT Q
160 P2=P/2
170 D=P2*P2-Q
180 IF D<0 THEN GOTO 230
190 X1=-P2-SGN(P)*SQR(D)
200 PRINT "X1=";X1
210 PRINT "X2=";Q/X1
220 END
230 PRINT "KEINE REELLEN LOESUNGEN"
240 END
```

Das obige Programm berechnet für quadratische Gleichungen mit reellen Lösungen zuerst die betragsgrößte, dann die andere nach VIÈTA. Es behandelt den Fall D=0 nicht gesondert, weil das numerisch nicht notwendig ist.

```
LIST
100 REM REELLE LOESUNGEN
110 REM EINER QUADR. GLEICHUNG
120 PRINT "P="
130 INPUT P
135 LPRINT "P="; P
140 PRINT "Q:"
150 INPUT Q
155 LPRINT "Q="; Q
160 P2=P/2
170 D=P2*P2-Q
180 IF D<0 THEN GOTO 230
190 X1=-P2-SGN(P)*SQR(D)
200 LPRINT "X1=";X1
210 LPRINT "X2=";Q/X1
220 END
230 LPRINT "KEINE REELLEN LOESUNGEN"
240 END
```

Die obige Programmversion druckt die Angaben und die Lösungen auf dem Printer/Plotter aus.

1.3 Satz von VIÈTA

Beispiel:

Die Gleichung $(x+4)(x-3) = 0$ ist in $\mathbb{N}$ zu lösen!

Lösung:

1. Variante

$(x+4)(x-3) = 0$

$x^2 + x - 12 = 0$

$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 12}$

$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1+48}{4}}$

$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{7}{2}$

$x_1 = 3 \quad x_2 = -4$

$L = \{3, -4\}$

2. Variante

Ein Produkt ist genau dann gleich null, wenn mindestens einer der Faktoren null ist! Einfacher ist deshalb folgender Lösungsweg:

$(x+4)(x-3) = 0 \Leftrightarrow$

$x + 4 = 0 \vee x - 3 = 0$

$x_1 = -4 \quad x_2 = 3$

$L = \{-4, 3\}$

Beispiel:

Wie lautet die quadratische Gleichung mit der Lösungsmenge $L = \left\{-\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right\}$?

Lösung:

1. Variante

$\left[x - \left(-\frac{2}{3}\right)\right]\left(x - \frac{3}{2}\right) = 0$

$\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) = 0$

$x^2 - \frac{5x}{6} - 1 = 0$

$6x^2 - 5x - 6 = 0$

2. Variante

$p = -(x_1 + x_2) = -\left(-\frac{2}{3} + \frac{3}{2}\right) = -\frac{5}{6}$

$q = x_1 x_2 = -\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = -1$

$\Rightarrow x^2 - \frac{5x}{6} - 1 = 0$

$6x^2 - 5x - 6 = 0$

Satz von VIÈTA:

Hat die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ $(p, q \in \mathbb{R})$ zwei verschiedene Lösungen x_1 und x_2, so gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

(1) $x_1 + x_2 = -p$

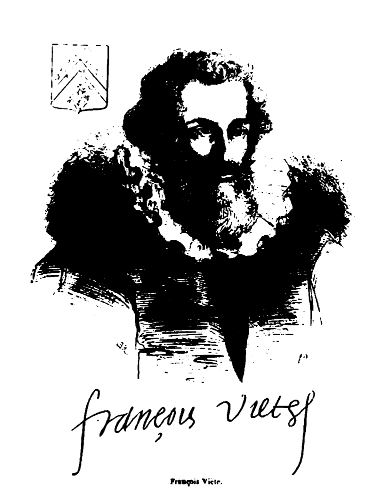
(2) $x_1 \cdot x_2 = q$

(3) $(x - x_1)(x - x_2) = x^2 + px + q$

Wie lautet der Satz von VIÈTA, wenn die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ $(p, q \in \mathbb{R})$ genau eine Lösung x_1 hat? Wie läßt sich der Satz von VIÈTA beweisen? (Vgl. Aufgabe **63.**)

---

[1]) Das Programm wurde auf APPLE-, CASIO- und SHARP-Computer getestet.



Francois VIÈTA (1540—1603), französischer Mathematiker und Jurist.

Beispiel:

Von der Gleichung $x^2 - 24x - 81 = 0$ kennt man eine Lösung $x_1 = 27$, die andere ist zu bestimmen.

Lösung:

1. Variante

$x_1 x_2 = q \Leftrightarrow 27 x_2 = -81 \Leftrightarrow x_2 = -3$

2. Variante

Wegen $(x - x_1)(x - x_2) = x^2 + px + q$ gilt
$(x^2 + px + q) : (x - x_1) = x - x_2$

Wir können also die gegebene Gleichung durch den zur Lösung $x_1 = 27$ gehörenden Linearfaktor $(x - 27)$ dividieren.

$$(x^2 - 24x - 81) : (x - 27) = x + 3$$
$$\underline{-(x^2 - 27x)}$$
$$3x - 81$$
$$\underline{-(3x - 81)}$$
$$0$$

$x^2 - 24x - 81 = (x - 27)(x + 3) \Rightarrow x_2 = -3$

2. Quadratische Funktionen

Beispiele für quadratische Funktionen: $y = x^2$; $y = 3x^2 - 4x + 5$; $y = -2x^2 + 4$ usw.

Beispiel:

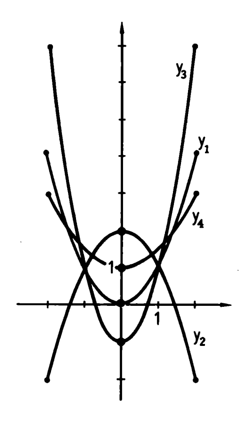
In einem kartesischen Koordinatensystem sind — über der Definitionsmenge $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqq x \leqq 2\}$ — die Funktionen mit den Funktionsgleichungen $y_1 = x^2$, $y_2 = -x^2 + 2$, $y_3 = 2x^2 - 1$ und $y_4 = \frac{x^2}{2} + 1$ graphisch darzustellen.

Weiters sind die Koordinaten des jeweils höchsten bzw. tiefsten Punktes S (Scheitelpunkt) aus der Zeichnung abzulesen.

Lösung:

Wertetabelle:

x	−2	−1	0	1	2	S
$y_1 = x^2$	4	1	0	1	4	(0, 0)
$y_2 = -x^2 + 2$	−2	1	2	1	−2	(0, 2)
$y_3 = 2x^2 - 1$	7	1	−1	1	7	(0, −1)
$y_4 = \frac{x^2}{2} + 1$	3	1,5	1	1,5	3	(0, 1)



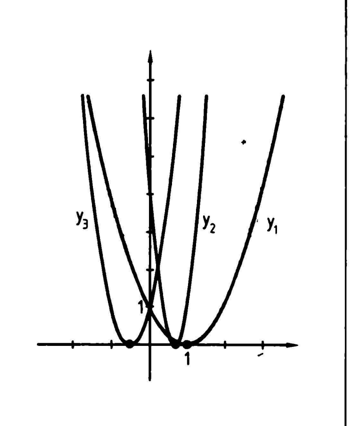
Beispiel:

Über einer selbstgewählten Definitionsmenge sind die Funktionen mit den Funktionsgleichungen $y_1 = (x-1)^2$, $y_2 = (3x-2)^2$ und $y_3 = (2x+1)^2$ in einem kartesischen Koordinatensystem darzustellen und mit dem Graphen der Funktion $x \mapsto x^2$ zu vergleichen.

Lösung:

Wertetabelle:

x	− 2	− 1	0	1	2	S
$y_1 = (x-1)^2$	9	4	1	0	1	$(1, 0)$
$y_2 = (3x-2)^2$	64	25	4	1	16	$\left(\frac{2}{3}, 0\right)$
$y_3 = (2x+1)^2$	9	1	1	9	25	$\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$



Beispiel:

Die Nullstellen[1] der durch $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ festgelegten Funktionen sind zu ermitteln und graphisch darzustellen.

Lösung:

Die gesuchten Nullstellen sind die Lösungen der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$. Die Diskriminante dieser Gleichung ist $b^2 - 4ac$.

Es sind drei Fälle möglich:

(1) $D > 0$	(2) $D = 0$	(3) $D < 0$
$L = \left\{\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}, \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right\}$ (zwei reelle Lösungen)	$L = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$ (eine Doppellösung)	$L = \{\}$ (keine reelle Lösung)
N_1, N_2	$N_1 = N_2$	
Zwei Nullstellen: $N_1\left(\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}, 0\right)$ $N_2\left(\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}, 0\right)$	Eine doppelt zu zählende Nullstelle: $N\left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$	Keine Nullstelle

[1]) Ein Wert x heißt **Nullstelle** der Funktion f, wenn $f(x) = 0$ gilt. Der Wert x bezeichnet dann genau den Schnittpunkt des Funktionsgraphen mit der x-Achse. Die Nullstelle der quadratischen Funktion ist die Lösung der zugeordneten quadratischen Gleichung.

Quadratische Funktionen

sind Funktionen, die durch eine Funktionsgleichung $y = ax^2 + bx + c$ $(a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ dargestellt werden können.

Der Graph der Funktion mit der Funktionsgleichung

$y = ax^2 + c$ $\quad (a, c \in \mathbb{R})$

ist eine Parabel, die um c Einheiten gegenüber dem Graphen von $y = ax^2$ verschoben ist. Die Verschiebung erfolgt längs der y-Achse. Das Vorzeichen von c bestimmt die Richtung der Verschiebung: $c > 0$ nach oben, $c < 0$ nach unten. Der Scheitelpunkt S hat die Koordinaten $S(0, c)$. Für $|a| > 1$ wird die Parabel in der y-Richtung gestreckt; sie wird in der y-Richtung gestaucht, wenn $0 < |a| < 1$. Was gilt für $a < 0$?

Der Graph der Funktion mit der Funktionsgleichung

$y = (x + m)^2$ $\quad (m \in \mathbb{R})$

ist eine Parabel, die um $-m$ Einheiten gegenüber dem Graphen von $y = x^2$ verschoben ist. Die Verschiebung erfolgt längs der x-Achse. Der Scheitelpunkt S hat die Koordinaten $S(-m, 0)$.

Der Graph der Funktion mit der Funktionsgleichung

$y = (kx + m)^2$ $\quad (k, m \in \mathbb{R})$

ist eine Parabel, die um $-\frac{m}{k}$ Einheiten gegenüber dem Graphen von $y = k^2x^2$ verschoben ist.

AUFGABEN

Bei den folgenden Aufgaben ist die Lösungsmenge in $\mathbb{R}$ zu ermitteln!

1. a) $x^2 = 64$ **b)** $3x^2 - 147 = 0$ **c)** $\frac{4x^2}{5} = \frac{12{,}8}{20{,}25}$ **d)** $0{,}08x^2 = \frac{8}{25}$

2. a) $36x^2 - 25 = 0$ **b)** $36x^2 + 25 = 0$ **c)** $17x^2 - 3 = 0$ **d)** $17x^2 + 3 = 0$

3. $(4 + 3x)(2 - x) + (4 - 3x)(2 + x) = 22$

4. $(6x - 9)(5x + 7) - (4x + 7)(3x - 6) = 429$

5. a) $(8x + 5)^2 + (8x - 5)^2 = 4658$ **b)** $(5x - 4)^2 - (4x - 5)^2 = 72$

6. a) $\frac{4}{x} + \frac{x}{5} = \frac{24}{x}$ **b)** $\frac{7}{3x} + \frac{x}{3} = \frac{11}{3x}$ **c)** $\frac{5}{6x} - \frac{x}{9} = \frac{7}{18x}$

7. a) $\left(\frac{7}{2} - x\right)\left(\frac{7}{2} + x\right) = 12$ **b)** $\left(\frac{5}{3} - x\right)\left(\frac{5}{3} + x\right) = \frac{10}{3}$ **c)** $\left(\frac{8}{7} - x\right)\left(\frac{8}{7} + x\right) = \frac{64}{49}$

8. a) $\frac{x-4}{x+4} = \frac{1-x}{1+x}$ **b)** $\frac{x+3}{x-3} = \frac{3+x}{3-x}$ **c)** $\frac{1-13x}{13-x} = \frac{11-x}{1-11x}$

9. a) $\frac{x}{x+2} - \frac{x}{2-x} = -\frac{2}{3}$ **b)** $\frac{x+5}{x-5} + \frac{x-5}{x+5} + \frac{13}{6} = 0$

10. a) $\frac{x-3}{x+3} + \frac{x+3}{x-3} = \frac{26}{x^2-9}$ **b)** $\frac{1}{x^2-9} + \frac{2x+3}{x+3} = \frac{3x+4}{x-3}$

11. a) $\frac{5x+3}{5x-3} + \frac{5x-3}{5x+3} = \frac{468}{25x^2-9}$ **b)** $\frac{9+x}{54-6x^2} + \frac{1}{5} = \frac{1}{6-2x} + \frac{1}{9+3x}$

12. a) $ax^2 = b$ **b)** $ax^2 = a^2 + b^2$ **c)** $ax^2 = a^2 - a$

13. a) $(a + 1)x^2 = 2\left(a + \frac{1}{2}\right)$ **b)** $(a - 4)x^2 = a^2 - 16$ **c)** $(a - b)x^2 = a^3 + a^2b - ab^2 - b^3$

14. a) $a^2x^2 + a^2 + 2abx^2 = b^2 - 2ab - b^2x^2$ **b)** $a^2(2a^2 + x^2) + b^2(2b^2 - x^2) = 3a^4 + b^4$

15. a) $(a + bx)(c + dx) = ac + adx + bcx + bc$ **b)** $(2x - 2a + b)(2x - 2a - b) = 4a(a + b)$
Anleitung: Man setze $2x - 2a = u$.

16. a) $\frac{1}{ax} = ax$ **b)** $\left(x - \frac{1}{a}\right)^2 = \frac{1}{b^2}$ **c)** $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{(ax+b)(ax-b)}$

17. a) $\frac{a-x}{1-ax} - \frac{1-ax}{a-x} = 0$ **b)** $\frac{a-x}{1-ax} = \frac{1-bx}{b-x}$

18. a) $\frac{x}{a} + \frac{b}{x} = \frac{a^2-ab-b^2}{ax}$ **b)** $\frac{a+2b-2x}{a-2b+2x} = \frac{x+b-2a}{x+b+2a}$

19. a) $\frac{x+a}{x-a} + \frac{x-a}{x+a} = \frac{10a}{3}$ **b)** $\frac{x+a}{x-a} + \frac{x-a}{x+a} = \frac{2a^2+2}{1-a^2}$

20. a) $\sqrt{29 - \sqrt{x^2 - 9}} = 5$ **b)** $\sqrt{181 - \sqrt{x^2 - 25}} = 13$

21. a) $12 + \sqrt{19 - \sqrt{6 + \sqrt{x^2 - 40}}} = 16$ **b)** $2 + \sqrt{12 - \sqrt{5 + \sqrt{x^2 - 9}}} = 5$

22. a) $\sqrt{13 + x} + \sqrt{13 - x} = 5\sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{5 + x} + \sqrt{5 - x} = 3\sqrt{2}$

23. a) $2\sqrt{3 - 2x} + \sqrt{3 + 2x} = \sqrt{19 - 6x}$ **b)** $2\sqrt{261 - x} - \sqrt{2 + 2x} = \sqrt{2}\sqrt{5 - 3x}$

Bei den Aufgaben **24.** bis **28.** ist die jeweils gefragte Größe zu berechnen, wobei im Ergebnis keine Doppelbrüche vorkommen sollen:

24. a) $O_K = 4\pi r^2$, $r = ?$ **b)** $A = \frac{\pi}{4}d^2$, $d = ?$ **c)** $A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $a = ?$

25. a) $A = 2a^2(\sqrt{2} + 1)$, $a = ?$ **b)** $A = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$, $a = ?$ **c)** $V = \frac{4\pi r^2 h}{3}$, $r = ?$

26. a) $a^2 + b^2 = c^2$ (1) $a = ?$ (2) $b = ?$ (3) $c = ?$ **b)** $O_{HK} = 4\pi(r_1^2 + r_2^2)$ (1) $r_1 = ?$ (2) $r_2 = ?$

27. a) $V = \frac{\pi h}{6}(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2)$ (1) $r_1 = ?$ (2) $r_2 = ?$ **b)** $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ (1) $a = ?$ (2) $b = ?$ (3) $c = ?$

28. a) $A = \frac{c}{4}\sqrt{4a^2 - c^2}$, $a = ?$ **b)** $O_P = a^2 + 2a\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}$, $h = ?$

Bei den folgenden Aufgaben ist die Lösungsmenge in $\mathbb{R}$ zu bestimmen!

29. a) $x(x-1)=0$ **b)** $4x+5x^2=0$ **c)** $\frac{3x^2}{2}=9x$

30. a) $x^2+x-6=0$ **b)** $x^2-x-2=0$ **c)** $x^2-x-12=0$

31. a) $x^2-10x+8=0$ **b)** $x^2-2x-8=0$ **c)** $x^2-7x+3{,}25=0$

32. a) $5x^2-36x+55=0$ **b)** $6x^2+13x+6=0$ **c)** $5x^2-12x-99=0$

33. a) $3x^2-10x+3=0$ **b)** $4x^2+x+10=0$ **c)** $13x^2-4x+1=0$

34. Die Lösungsmengen jeder der folgenden quadratischen Gleichungen bestimmt einen Weg durch das Labyrinth[1]:

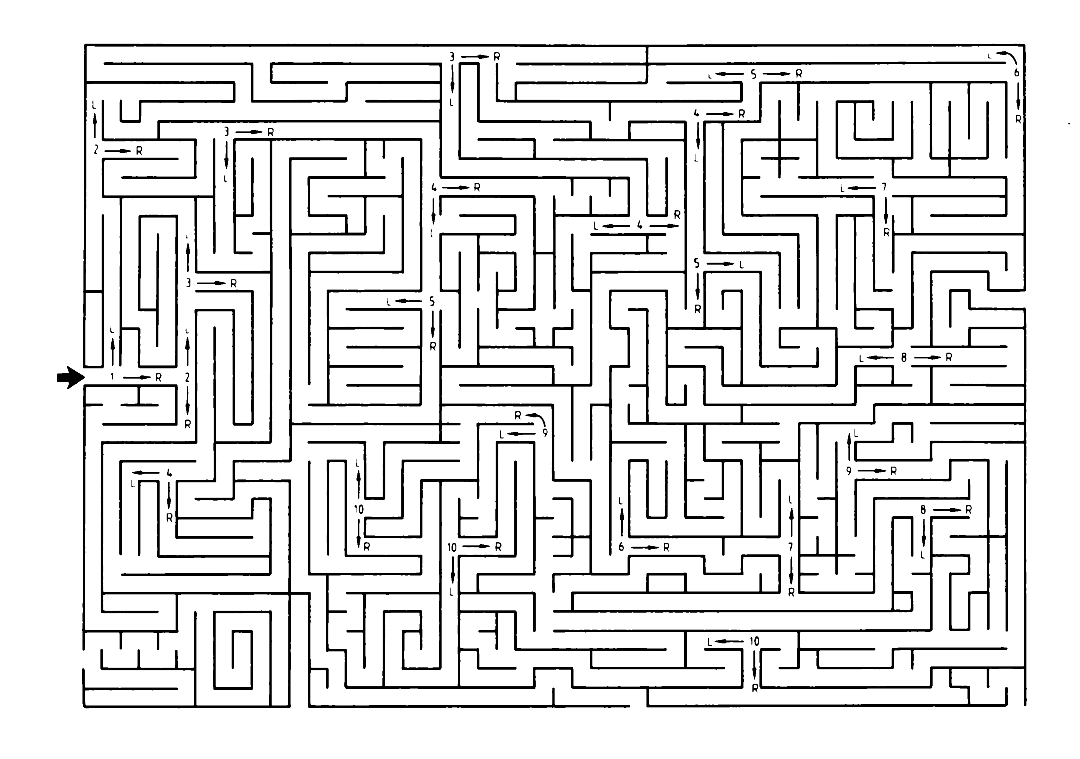
(1) $x^2-6x+8=0$ (2) $x^2+3x-70=0$ (3) $x^2-7x+10=0$ (4) $x^2-6x-5=0$

(5) $x^2-3x-4=0$ (6) $8x^2-85x+225=0$ (7) $2x^2-5x-3=0$

(8) $2x^2-5x+2=0$ (9) $2x^2+17x+30=0$ (10) $3x^2-4x+1=0$

RECHTS: $\{4, -1\}$; $\{-2{,}5, -6\}$; $\{5, 2\}$; $\{5{,}625, 5\}$; $\{3, -0{,}5\}$

LINKS: $\{2, 0{,}5\}$; $\{4, 2\}$; $\{1, 0{,}\dot{3}\}$; $\{7, -10\}$; $\{6{,}742, -0{,}742\}$



[1]) Irrgarten.

Bei den nachstehenden Aufgaben ist die Lösungsmenge in ℝ zu ermitteln!

35. a) $(x+2)(x+3)-(x-4)(7-x)=70$ **b)** $6(x-2)(x-3)-(10-x)(12-2x)=26$

36. a) $(x+1)^2+(x+2)^2=(2x+1)^2$ **b)** $3(2x-2)^2+(4x-6)^2=7(3x-4)^2$

37. $(x+1)(x+2)-(3x-2)^2=(2x-1)^2+(3x-1)(x+1)$

38. a) $(x-5)^3+(7-x)^3=8$ **b)** $(11-x)^3+(x-3)^3=512$

39. a) $x+\frac{1}{x}=\frac{10}{3}$ **b)** $\frac{x+2}{5x-6}=\frac{x-1}{2x-1}$ **c)** $\frac{x+5}{3x-5}=\frac{x-1}{2(x-3)}$

40. a) $\frac{x}{x-8}+\frac{x-8}{x}=\frac{26}{5}$ **b)** $\frac{x+5}{x-5}-\frac{x-5}{x+5}=\frac{120}{11}$

41. a) $\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+10}$ **b)** $\frac{1}{x+7}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}$

42. a) $\frac{x+1}{x+2}+\frac{x-1}{x-3}=\frac{23}{(x+2)(x-3)}$ **b)** $\frac{x+4}{x-3}+\frac{x-3}{x-5}=\frac{19}{x^2-8x+15}$

43. a) $\frac{3x+9}{(x+3)^2}+\frac{7}{x-3}=\frac{11x+8}{x^2-9}$ **b)** $\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}=\frac{x+3}{x+4}+\frac{x+4}{x+5}$

44. a) $x^2-(a+b)x+ab=0$ **b)** $x^2-2(a^2+b^2)x+(a^2-b^2)^2=0$

45. a) $x^2-(a^2+b^2)x+(a^2-ab+b^2)ab=0$ **b)** $x^2-(a^2+b^2)x-(a^2+ab+b^2)ab=0$

46. a) $ax^2+(a-1)x-1=0$ **b)** $ax^2-(a^2+1)x+a=0$

47. a) $(a-b)x^2-bx-a=0$ **b)** $abx^2-(a+b)(ab+1)x+(a^2+1)(b^2+1)=0$

48. a) $(x-a)^2-bc=b(x-a-c)$ **b)** $ax^2-ab(x+6b)-a^2(x+2b)=0$

49. a) $(a-x)^2+(b-x)^2=(a-b)^2$ **b)** $(x-a)^2+(x-b)^2=(a-b)^2$

50. a) $x\left(x-\frac{a}{b}\right)=\frac{1}{b}-\frac{x}{a}$ **b)** $x^2\left(1+\frac{b}{a}\right)-\frac{a}{a-b}=\frac{2bx}{a-b}$

51. a) $x+\frac{1}{x}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ **b)** $x-\frac{1}{x}=\frac{a}{b}-\frac{b}{a}$

52. a) $\frac{1}{a-b+x}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{x}$ **b)** $\frac{1}{x-a+b}=\frac{1}{x}-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

53. a) $\frac{x}{a+x}+\frac{a+x}{x}=\frac{5}{2}$ **b)** $x^2-\frac{ax}{a-b}+\frac{a^2}{b(a-b)}-\frac{ax}{b}=0$

54. a) $x+\frac{a+b}{a-b}=\frac{a-b}{a+b}+\frac{1}{x}$ **b)** $x-\frac{a+b}{a-b}=\frac{a-b}{a+b}-\frac{1}{x}$

55. a) $\frac{a}{x-b}+\frac{x-a}{b}=2$ **b)** $\frac{1}{x-a}+\frac{x-b}{ab}=\frac{2}{b}$

56. a) $\frac{a+bx}{a-bx}-\frac{a-bx}{a+bx}=\frac{4ab}{a^2-b^2}$ **b)** $\frac{x+a}{x-a}-\frac{x-a}{x+a}=\frac{4a(a+b)}{2ab+b^2}$

57. a) $\sqrt[3]{5x+9+2\sqrt{x^2-2x+4}}=2$ **b)** $\sqrt[3]{5x+3+2\sqrt{x^2-3x+10}}=4$

58. a) $\sqrt{2x+7}=\sqrt{x+3}+1$ **b)** $2\sqrt{x+1}=\sqrt{5x-6}+1$

59. a) $\sqrt{x+32}+\sqrt{x+5}=\sqrt{x+77}$ **b)** $\sqrt{2x+5}=\sqrt{5}\sqrt{x-3}-\sqrt{x+2}$

60. a) $2\sqrt{x+4}+3\sqrt{x-1}=3\sqrt{3x+1}$ **b)** $4\sqrt{x-1}+2\sqrt{3x+1}=4\sqrt{2x+6}$

61. a) $\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}=\sqrt{a+b}$ **b)** $\sqrt{x+a}-\sqrt{b-x}=\sqrt{a+b}$

62. a) $\sqrt{x+a}+\sqrt{b-x}=\sqrt{a+b}$ **b)** $\sqrt{(x+a)^2+(x-2b)^2}=a+2b$

63. Der Satz von VIÈTA ist für $D \geqq 0$ zu beweisen!



François VIÈTA (1540—1603) entstammte aus einer katholischen Kaufmannsfamilie. Er studierte Jus in Poitiers und war dann Advokat in Fontenay-le-Compte. Mathematik war sein Hobby. Viele seiner Klienten waren Hugenotten; dadurch wurde VIÈTA, der zwar katholisch aber sehr tolerant war, in die religiösen Bürgerkriege verwickelt, die mit der grausamen Bartholomäusnacht (1572) endeten. Als geschickter Anwalt konnte er Advokat im Parlament von Paris und später persönlicher Berater am Hof werden. In den Kriegen gegen England wurde er unter anderem mit Dechiffrieraufgaben betraut.

In der Mathematik kennen wir ihn vor allem durch seine Einführung der Buchstabenalgebra in dem Werk „Logistica Speciosa". Er verwendete Vokale für variable Größen, Konsonanten für bekannte Größen, die Zeichen +, − und den Bruchstrich; für Gleichheit schrieb er aequibitur (das Zeichen = wurde ja 1557 von RECORDE eingeführt, setzte sich aber nur langsam durch). Den von CARDANO nicht betrachteten Fall der kubischen Gleichungen, den sogenannten **casus irreducibilis** , bei dem alle drei Lösungen reell sind, löste VIÈTA mit Hilfe von trigonometrischen Funktionen.

64. Wie lautet die Normalform der quadratischen Gleichung mit der Lösungsmenge L?

a) $L = \{-9, 1\}$ **b)** $L = \{-5, -33\}$ **c)** $L = \{-17^{(2)}\}$[1]

d) $L = \left\{\frac{1}{8}, 14\right\}$ **e)** $L = \left\{-\frac{3}{2}, \frac{4}{5}\right\}$ **f)** $L = \{1 + \sqrt{2}, 3 + \sqrt{3}\}$

65. Von einer quadratischen Gleichung kennt man eine Lösung; die andere ist zu bestimmen, falls es eine gibt.

a) $x^2 + 2x - 360 = 0,\ x_1 = 18$ **b)** $x^2 + 21x + 90 = 0,\ x_1 = -15$

c) $x^2 - 93x + 1512 = 0,\ x_1 = 72$ **d)** $2x^2 - 15x + 25 = 0,\ x_1 = 5$

e) $3x^2 + x - 2 = 0,\ x_1 = \frac{2}{3}$ **f)** $0{,}2x^2 + 4{,}8x + 19 = 0,\ x_1 = -5$

66. Wie lautet die Normalform der quadratischen Gleichung, deren Lösungen x_1, x_2 folgende Bedingungen erfüllen:

a) $x_1 + x_2 = 7;\ x_1 - x_2 = 3$ **b)** $x_1 + x_2 = 16;\ x_1x_2 = 55$

c) $x_1 - x_2 = 4{,}75;\ x_1x_2 = -5{,}625$ **d)** $x_1 + x_2 = -2;\ \frac{x_1}{x_2} = -0{,}5$

e) $x_1 + x_2 = 2;\ \frac{x_1}{x_2} = -2$ **f)** $x_1x_2 = -2{,}5;\ \frac{x_1}{x_2} = -4{,}9$

67. Man überprüfe die Lösungsmenge der folgenden quadratischen Gleichungen mit Hilfe des Satzes von VIÈTA:

a) $8x^2 - 65x + 8 = 0;\ L = \{8, 0{,}125\}$ **b)** $x^2 - 19{,}8x + 82{,}8 = 0;\ L = \{6, 13{,}8\}$

c) $\frac{x^2}{2} - 70x + 882 = 0;\ L = \{126, 14\}$ **d)** $x^2 + (4 - \sqrt{7})x - 4\sqrt{7} = 0;\ L = \{-4, \sqrt{7}\}$

68. Man bestimme in den folgenden Gleichungen die Konstante a so, daß die Diskriminante 0 ist:

a) $x^2 + 2x + a = 0$ **b)** $x^2 + ax + 9 = 0$ **c)** $x^2 - 2ax + 16 = 0$

d) $ax^2 - 4x + 1 = 0$ **e)** $16x^2 - 8ax + a = 0$ **f)** $3ax^2 + 2ax + 1 = 0$

69. Es ist zu kürzen:

a) $\frac{x^2 - 3x - 10}{x + 2}$ **b)** $\frac{2x^2 - 19x - 10}{x - 10}$ **c)** $\frac{8x^2 - 39x - 5}{x + 0{,}125}$

70. Die Richtigkeit der Lösungsformel $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ist durch Einsetzen in die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ zu zeigen!

71. Man zeige, daß die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ die Lösung **a)** 1 hat, wenn $a + b + c = 0$ gilt, **b)** −2 hat, wenn $4a - 2b + c = 0$ gilt!

---

[1]) Diese Schreibweise gibt an, daß −17 Doppellösung der quadratischen Gleichung ist.

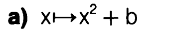
72. Der Graph der Funktion $x \mapsto y = 2x^2 - 4x - 6$ ist — über der Definitionsmenge $D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge \wedge (-1{,}2 \leqq x \leqq 3{,}2)\}$ — zu zeichnen; außerdem sind die Koordinaten des Scheitelpunkts S aus dem Graphen abzulesen.

73. In einem kartesischen Koordinatensystem sind — über der Definitionsmenge $\mathbb{R}$ — die Funktionen $x \mapsto y = x^2 - 6x + 8$, $x \mapsto y = x^2 - 6x + 9$, $x \mapsto y = x^2 - 6x + 10$ graphisch darzustellen; weiters ist der jeweils höchste bzw. tiefste Punkt S (Scheitelpunkt) graphisch zu ermitteln.

74. Man gebe die Eigenschaften des Graphen der Funktion $x \mapsto y = ax^2 + c$ $(a, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ an, verglichen mit der Grundparabel $x \mapsto y = x^2$, **a)** wenn a alle Werte aus $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ annimmt, **b)** wenn c alle Werte aus $\mathbb{R}$ annimmt. **c)** Welche Gerade ist Symmetrieachse für die durch $x \mapsto y = ax^2 + c$ $(a, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ dargestellten Parabeln?

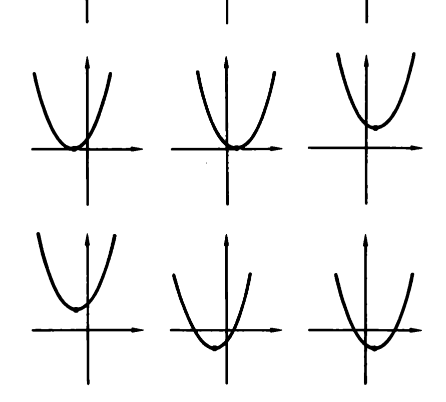
75. Der Graph der Funktion $y = (x-1)^2 - 2 = x^2 - 2x - 1$ ist zu zeichnen und mit den Graphen der Funktionen $y = x^2$ und $y = (x-1)^2$ zu vergleichen.

76. In den nebenstehenden Figuren sind die Graphen der folgenden Funktionen dargestellt $(a, b \in \mathbb{R}^+)$:



a) $x \mapsto x^2 + b$	**b)** $x \mapsto (x-a)^2$	**c)** $x \mapsto (x+a)^2 + b$
d) $x \mapsto x^2$	**e)** $x \mapsto (x+a)^2 - b$	**f)** $x \mapsto (x+a)^2$
g) $x \mapsto (x-a)^2 - b$	**h)** $x \mapsto x^2 - b$	**i)** $x \mapsto (x-a)^2 + b$

Welche Funktion gehört zu welchem Graphen?



77. Wie lauten jene Zahlen, die gleich ihrem Reziprokwert sind?

78. Das 5fache einer Zahl multipliziert mit derselben um 7 verminderten Zahl ergibt null. Gibt es ganze Zahlen, die die obige Bedingung erfüllen?

79. Die Seitenlängen einer rechteckigen Solarzelle mit der Fläche $216\,dm^2$ sollen im Verhältnis 2:3 stehen. Wie groß ist der Umfang u der Solarzelle?

80. Ein Drehkegel ist 9cm hoch und hat ein Volumen $V = 27\pi\,cm^3$. Wie groß ist sein Radius r?

81. *„Den größten Sprung mit der höchsten Fallhöhe führen die sogenannten ‚Todesspringer' seit Jahren den Touristen in Acapulco/Mexiko vor. Dabei stürzen sich die ebenso mutigen wie gut bezahlten Artisten im Kopfsprung aus einer Höhe von etwa 35 Metern über den Klippenrand hinaus in die Brandung. 17 bezahlten den Sprung bisher mit dem Leben."*[1]

Wie lange dauert so ein Kopfsprung?

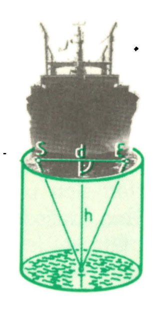


Anleitung: Wenn man einen Gegenstand fallen läßt, dann ist der soeben zurückgelegte Weg s von der dabei verstrichenen Zeit t abhängig: $s = \frac{g}{2}t^2$, wobei $g \approx 10\,m/s^2$ die Erdbeschleunigung ist.

[1]) Aus „GUINNESS, Lexikon der Superlative".

82. Zur Bestimmung der Wassertiefe wird in der Seefahrt das Echolot verwendet.
Der Ultraschallsender S hat zum Empfänger E eine Distanz von $d = 17\,m$ — vgl. nebenstehende Figur. Wie groß ist die bordseitige Wassertiefe h, wenn ein ausgesandter Schallimpuls **a)** im Atlantik — um den Breitengrad Null — nach 114 ms empfangen wird? **b)** im Roten Meer nach 83 ms registriert wird?

Anleitung: Schallwellen verhalten sich in der Ausbreitung wie Lichtwellen, also gilt: Einfallswinkel = Reflexionswinkel. Somit ist das Dreieck EST gleichschenkelig; zurückgelegter Weg der Schallwellen: $s = \overline{ST} + \overline{TE} = 2\,\overline{ST}$.



Gewässer	Schallgeschw. c in m/s
Weddellsee (Südpol)	1445
Atlant. Ozean (Äquator)	1516
Philippinengraben	1531
Rotes Meer	1534
Sargassosee (Azoren)	1536

83. Für welche Werte x ist der Ausdruck **a)** $\sqrt{56x - 14x^2}$
b) $\sqrt{3x(12x + 8)}$ definiert?

84. Auf einem Symposium über Fragen des Umweltschutzes überreicht jeder Teilnehmer jedem seiner Kollegen ein Manuskript seines Referats. Insgesamt wechseln **a)** 132 **b)** 272 Schriften ihren Besitzer. Wie viele Personen nahmen an dieser Veranstaltung teil?

85. Wir zerlegen die Zahl 5 in zwei Summanden, deren Produkt gleich 4 ist. Wie lauten die Summanden?

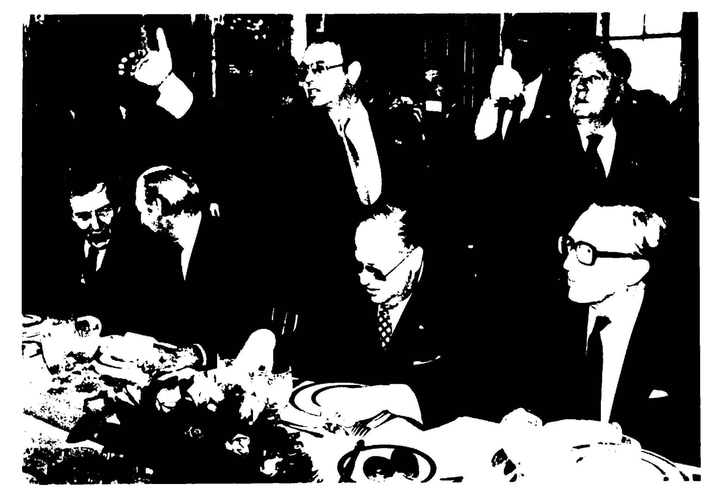
86. Die Summe zweier Zahlen beträgt 14, die Summe ihrer Quadrate ist 100. Zahlen?

87. Das geometrische Mittel zweier reeller Zahlen ist 16; ihr arithmetisches Mittel beläuft sich auf 20. Zahlen?

Anleitung: Arithmetisches Mittel — $m_a = \frac{a+b}{2}$, geometrisches Mittel $m_g = \sqrt{ab}$

88. Wie viele Ecken hat ein Polygon mit 44 Diagonalen?

89. Aus der Tageszeitung KURIER vom 1980 05 16:

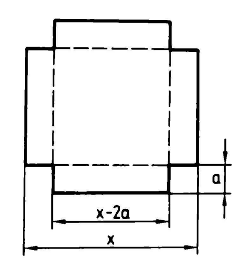


Rein mathematisch wären es 182 Treffen in knapp 36 Stunden: 12 Außenminister, UNO-Generalsekretär Waldheim und Bundeskanzler Kreisky – von denen jeder möglichst jeden anderen Staatsvertragsehrengast zum Plausch sehen wollte.

182 Treffen? Das stimmt nicht! Wie viele wären es tatsächlich gewesen?
Gäbe es überhaupt eine „natürliche Anzahl" von Staatsvertragsehrengästen, die miteinander 182 Rendezvous arrangieren könnten?

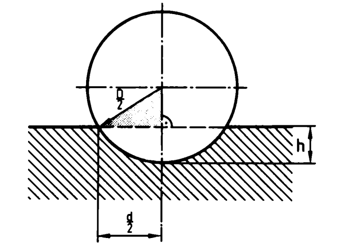
Anleitung: Es besteht kein Unterschied, wenn z. B. Herr Waldheim mit Herrn Kreisky — oder umgekehrt — Herr Kreisky mit Herrn Waldheim — zusammentrifft.

90. Aus einem quadratischen Stück Karton soll der Unterteil einer Schachtel gebastelt werden. Die Länge a jedes Einschnitts beträgt 3 cm. Wie groß ist die Seitenlänge des Pappstücks zu wählen, damit das Volumen der Schachtel $V = 507\,cm^3$ beträgt?



91. Beim BRINELLschen Härtetest wird eine Stahlkugel vom Durchmesser D = 13 mm in den prüfenden Werkstoff gedrückt. Nehmen wir an, der Durchmesser d des Eindruckkreises beträgt 5 mm; wie groß ist dann h?

Anleitung: $\left(\frac{D}{2}\right)^2 = \left(\frac{D}{2} - h\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$.

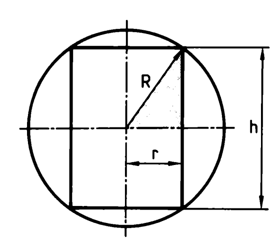




92. Jenes rechtwinkelige Dreieck, dessen Katheten sich um 7 cm unterscheiden und dessen Hypotenuse um 9 cm länger ist als die kürzere Kathete, soll einem Deltoid mit der Diagonale e = 10 cm flächengleich sein. Man berechne die zweite Diagonale des Deltoids.

93. Einer Kugel mit dem Radius R = 2 dm wird ein Drehzylinder eingeschrieben. Sein Achsenschnitt soll einen Umfang u = 112 cm aufweisen. Man bestimme r und h des Zylinders.

Anleitung: Wenn wir den pythagoreischen Lehrsatz anwenden (R, r, h) ist der Zylinder noch nicht eindeutig bestimmt. Durch die Angabe u = 112 cm lassen sich die Lösungen ermitteln. Hinsichtlich der Lösung des Gleichungssystems vgl. Aufgabe **91**.



94. Ein Privatkonto wird am 1. Jänner 1985 mit S 10000,— eröffnet. Nach einem Jahr fällt der Zinsfuß um ein Viertel seines früheren Wertes. Am Ende des zweiten Jahres können insgesamt S 10712,— behoben werden. Mit welchen Zinssätzen wurde das Kapital jeweils verzinst?

95. Im Jahr 1980 zählte die Bevölkerung Indiens $689{,}545 \cdot 10^6$ Einwohner. Nach Prognosen des Bureau of Census wird sie bis zum Jahr 2000 um 48,06% steigen.

Bezeichnet $\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}$ die Wachstumsrate von $\begin{Bmatrix} \text{1980 bis 1990} \\ \text{1990 bis 2000} \end{Bmatrix}$, dann wird laut Prognose gelten: $p_2 = 0{,}94\,p_1$.

Wie groß sind die zu erwartenden Wachstumsraten? Man vergleiche diese mit den absoluten Zuwächsen der Bevölkerung!

96. Von einem rechtwinkeligen Dreieck ist die Kathete a = 24 mm und der nichtanliegende Hypotenusenabschnitt q = 20 mm gegeben. Wie lang ist die Hypotenuse c und die zweite Kathete b?

97. Die Strecke AB soll im Verhältnis $\overline{AX} : \overline{XB} = \overline{XB} : \overline{AB}$ geteilt werden (Goldener Schnitt). In welchem Verhältnis stehen die Teilstrecken zueinander?

Anleitung: Man setze die Länge der Strecke AB gleich 1.



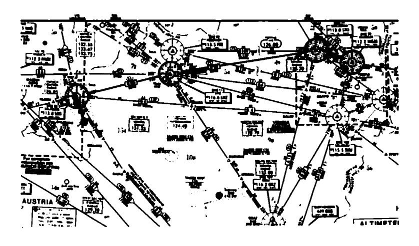
98. Der Verkaufspreis eines einfachen Golddukatens erhöht sich — nach mehreren Kursänderungen — insgesamt um S 48,—; dadurch erhält man nun für S 20160,— einen Dukaten weniger als vor diesen Kursänderungen.

Um wieviel Prozent wurde der Golddukaten teurer?

99. Die Luftstraße „R 23“ (Schwechat—Linz—Salzburg) ist 270 km lang. Gegenwind von 60 km/h verursacht eine Flugverspätung von 2,4 min.

Wie groß ist die Eigengeschwindigkeit des Flugzeugs und die Flugdauer?

Anleitung: Geschwindigkeiten addieren sich vektoriell!



100. Am 20. Mai 1983 hatte die Piesting bei Ebreichsdorf (NÖ, Steinfeld) eine durchschnittliche Geschwindigkeit von 0,5 m/s. Ein Motorboot, das sich von Ebreichsdorf 1 km weit entfernte, dann wendete und wieder zurückfuhr, benötigte 3 min 20 s.

Wie schnell wäre das Boot in einem stehenden Gewässer unterwegs (in m/s und km/h)?

101. Wird die LP „1100 BEL AIR PLACE CALIFORNIA" von Julio IGLESIAS zu einem bestimmten Preis p angeboten, so besteht eine Nachfrage von $x = 30000 - 100\,p$[1] (Stück). (Hier wird angenommen, daß die Nachfrage sinkt, wenn der Preis steigt!) Der sich daraus ergebende Umsatz U ist von der Anzahl der verkauften Stück und dem zugehörigen Preis abhängig: $U = px$. Bei welchen Preisen erzielt die Firma einen Umsatz von S 2160000,—?



102. Eine Rakete (Masse m) muß auf dem Weg von der Erde (Masse M_1) zum Mond (Masse M_2) $D = 384000$ km überwinden. Auf ihrer Reise passiert sie einen Punkt im All, in dem sie von der Masse der Erde und der des Mondes gleich stark angezogen wird: Wo liegt dieser sogenannte „Neutrale Punkt", wenn man annimmt, daß $M_1 = 81\,M_2$ ist?

Anleitung: Anziehungskraft F_1 zwischen Rakete und Erde: $F_1 = \frac{kmM_1}{x^2}$

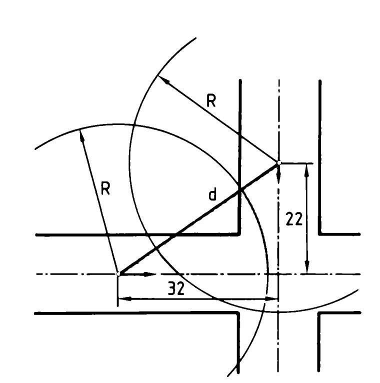
Anziehungskraft F_2 zwischen Rakete und Mond: $F_2 = \frac{kmM_2}{(D - x)^2}$

x und D − x sind die jeweiligen Abstände der Rakete zu den Himmelskörpern und $k = 66{,}70 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{Nm^2/kg^2}$ ist die Gravitationskonstante.

103. Um 12 Uhr sind die beiden CB-Funker[2] GST1 und AP23 in folgender Situation (vgl. Figur):
— GST1 fährt mit 60 km/h, AP23 mit 120 km/h in Richtung des Kreuzungsmittelpunkts
— die Reichweite ihrer Funkgeräte beträgt R = 30 km
— GST1 ist noch 22 km, AP23 noch 32 km von der Kreuzung entfernt.

Wann können die beiden Funker frühestens miteinander in Funkkontakt treten? Wann wird die Verbindung voraussichtlich wieder abreißen?

Anleitung: (1) $d < R \Leftrightarrow$ Funkverbindung ist möglich
(2) $d > R \Leftrightarrow$ keine Funkverbindung ist möglich
(3) $d = R \Leftrightarrow$ Funkkontakt ist gerade noch möglich.

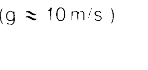


104. Von der Aussichtsterrasse des Wiener Donauturms ($h_0 = 150$ m) wird ein Kieselstein mit $v_0 = 5$ m/s emporgeschleudert.

a) Wie lange dauert es, bis der Stein am Turm vorbei gefallen und am Boden gelandet ist?

b) Der Zusammenhang zwischen Zeit t und Höhe h ist graphisch darzustellen, wobei die Zeit auf der x-Achse und die Höhe auf der y-Achse aufzutragen ist. Schließlich ist die maximale Höhe aus dem Schaubild abzulesen.

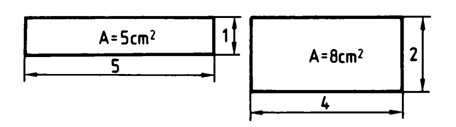
Anleitung: Die Höhe h errechnet sich zu $h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{g}{2} t^2$ $(g \approx 10\,\mathrm{m/s^2})$



Maßstäbe: t: 1 cm ≙ 1 s
h: 1 cm ≙ 30 m

[1]) Diese Nachfragefunktion wurde beliebig gewählt.
[2]) CB ist die Abkürzung für Citizen Band (engl.): Amateurfunk.

105. „Rechtecke gleichen Umfangs haben den gleichen Flächeninhalt". Die meisten bei einer kleinen Umfrage interviewten Nichtmathematiker entschieden sich dafür, diesen Satz als richtig anzusehen. Dies läßt sich aber leicht widerlegen. Es gibt nämlich unter allen Rechtecken (vgl. nebenstehende Figur) mit dem Umfang $u = 12$ cm genau eines, das den größten Flächeninhalt besitzt. Dieses ist zu bestimmen.



(Bemaßungen in Zentimeter)

Anleitung: $u = 2(a + b) = 12 \Leftrightarrow a + b = 6 \Leftrightarrow a = 6 - b$. Für den Flächeninhalt gilt: $A = ab \Leftrightarrow A = (6 - b)\,b \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow A = 6b - b^2$. Und nun ist A in Abhängigkeit von b zeichnerisch darzustellen...

106. Der maximale Umsatz der LP „1100 BEL AIR PLACE CALIFORNIA" von Julio IGLESIAS aus Ausgabe **101.** ist graphisch zu ermitteln.

107. Die minimale Entfernung der beiden Funker GST1 und AP23 aus Aufgabe **103.** ist zeichnerisch zu ermitteln.

Bemerkung: Man zeichne $t \mapsto d^2$. Minumum von $|d| \Leftrightarrow$ Minimum von d^2.

108.

Vier Monate Zeit fürs große Rendezvous

Schon einmal unternahm der WWF einen großen Anlauf – der KURIER berichtete am 7. August 1982 unter dem Titel „Freie Meere als Wal-Geschenk" darüber – und verstolperte sich: Die großen Walfangnationen, voran Japan und die Sowjetunion, weigerten sich, die Hetzjagd auf die Giganten der Meere zu verbieten. Jetzt jedoch erwägt der WWF einen überaus geschickten Trick: Er macht für die Wale in Fremdenverkehr.

Sie jauchzen wie Kinder und schnattern wie Affen

Die Walfangnationen werden die Absicht, jede in ihrer Währung, als Groscherl-Geschäft beiseiteschieben. Nicht wegschieben aber werden sie jene Touristenschiffe können, die zum Liebes-Sightseeing angerauscht kommen. Genau zur Paarungszeit aber gehen sonst die Walfänger ans Werk.

Buckelwale sollen klug vermarktet werden

● Wale in Friscos Bucht verirrt

Ein 40 Tonnen schwerer Buckelwal und ein kleinerer Grauwal haben sich in der Bucht von San Francisco verirrt. Die Meeressäuger werden jetzt auf See gelotst, sonst droht ihnen der Hungertod.

Laßt die „sanften Riesen" leben!

Deshalb fordert Greenpeace ein sofortiges, endgültiges und weltweites Verbot des Walfangs!

Finnwale 80.000
Seiwale 60.000
Buckelwale 5.000
Blauwale 1.000

Worauf ist bei der wirtschaftlichen Ausbeute einer Tierart unbedingt zu achten, um ihre Ausrottung zu verhindern?

Im nebenstehenden Graphen findet sich auf der x-Achse die Anzahl der Wale, auf der y-Achse wurde die Wachstumsrate eingetragen. Anhand des Graphen von f(x) lassen sich drei Fälle unterscheiden:

(1) $x \in]x_1, x_2] \Rightarrow$ die Population[1] wächst bis x_2.

(2) $x > x_2 \Rightarrow$ die Population[1] sinkt (infolge der innerartlichen Konkurrenz) bis x_2.

(3) $x \in]0, x_1[\Rightarrow$ Population[1] sinkt bis x_0, d. h. sie stirbt schließlich aus, da sich aufgrund der zu geringen Anzahl von Walen keine Paare mehr finden und fortpflanzen können.

[1]) Gesamtheit der Individuen einer Art oder Rasse, in unserem Fall ist das die Anzahl der Blauwale.

108. (Fortsetzung)

Die Wachstumsrate y (in einem bestimmten Zeitpunkt) ist abhängig von der jeweiligen Anzahl x der Wale:

$y = ax^2 - (bx^3 + cx) - ex$

ax^2 ..... normales Fortpflanzungsverhalten

$bx^3 + cx$ ..... Abnahme der Population durch zu viele bzw. zu wenige Tiere

ex ..... Anzahl der gefangenen Tiere

Durch Beobachtung ergeben sich Richtwerte für a, b und c: $a = 1{,}01 \cdot 10^{-6}$, $b = 10^{-11}$, $c = 10^{-3}$

a) Was kann man über das vermutliche Schicksal der Wale für $x = 10^4$ aussagen, wenn für die Fangrate e — sie gibt die gefangenen Tiere in Prozent von x an — gilt:

(1) $e = 0$ (2) $e = 10^{-2}$

Anleitung: $ax^2 - (bx^3 + cx) - ex = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \ldots$ Anschließend sind für a, b, c und e einzusetzen usw.

b) (1) Wie groß darf die Fangrate e maximal sein, wenn ein Bestand von $x = 10^4$ Wale nicht aussterben soll?

(2) Auf welche Anzahl von Walen pendelt sich dann die Population ein?

Analytische Aufgaben mit quadratischen Funktionen

109. Gegeben: $y = \frac{x^2}{4} + 2x - 3$, $y = \frac{x}{2} + 1$

Gesucht: Koordinaten der Schnittpunkte S_1 und S_2 der beiden Funktionsgraphen.

110. Gesucht ist die Gleichung einer quadratischen Parabel, die durch die Punkte A (6, – 1), B (– 3, – 19) und C (3, 5) geht.

111. Die Punkte $P_1 (0, 3)$, $P_2 (2, -1)$ und $P_3 (4, 3)$ liegen auf dem Graph einer quadratischen Funktion.

a) Wie lautet die Gleichung dieser Funktion?

b) Wie groß ist der Funktionswert an der Stelle $x = -1$?

c) Nullstellen der Funktion?

112. Durch die Punkte V (2, 2) und W (5, – 1) soll eine quadratische Parabel gelegt werden, die die Gerade $y = -x - 2$ an der Stelle $x = -3$ schneidet. Funktionsgleichung?

113. $y = -\frac{3x}{2} + 15$, $y = x^2 - 3x + c$

a) Die Konstante c ist so zu bestimmen, daß die quadratische Funktion an der Stelle $x = -2$ von der gegebenen Geraden geschnitten wird.

b) Koordinaten der beiden Schnittpunkte?

114. Gesucht ist die Gleichung einer quadratischen Parabel, die $y = -x^2 + 16x$ bei $x_1 = 2$ und bei $x_2 = 10$ schneidet und außerdem mit der y-Achse bei $y = 25$ einen Schnittpunkt hat.

115. Eine quadratische Funktion hat bei $x = 3$ eine Nullstelle und schneidet die Gerade $y = 2x - 3$ an den Stellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 5$. Funktionsgleichung?

116. Gegeben: $y = 4x^2 - 12x - 21$

a) Der Funktionsgraph ist über [– 3, 6] zu zeichnen. (Maßstab: x-Werte, 1 ≙ 1 cm; y-Werte, 10 ≙ 1 cm)

b) Wie groß ist der Funktionswert an der Stelle $x = 2{,}5$?

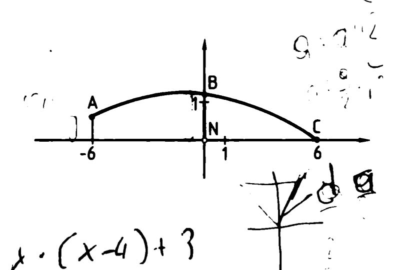
c) An welchen Stellen ist der Funktionswert $y = 10$?

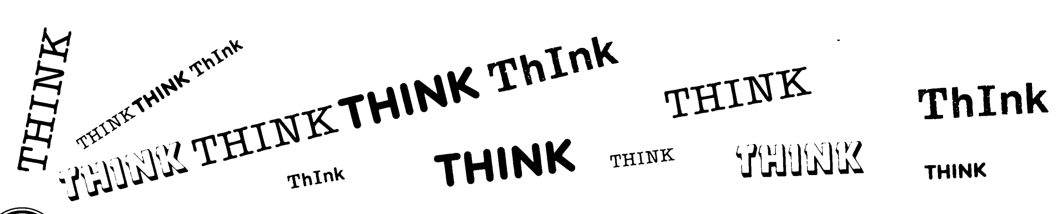
d) Wie lautet die Gleichung jener Geraden, die die gegebene Parabel an der Stelle $x = -1$ schneidet und die Steigung $k = 0{,}5$ hat?

e) Der zweite Schnittpunkt S der Geraden mit der Parabel ist zu berechnen.

117. Die nebenstehende Figur veranschaulicht die Wurfparabel eines vom Punkt A rückgespielten Tennisballs (unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes). Der Abschußpunkt A liegt 6,00 m vor dem Netz in einer Höhe von 0,60 m. Der Ball überfliegt das Netz in einer Höhe von 1,20 m (B) und trifft 6,00 m hinter dem Netz den Boden (C).

Man berechne die Funktionsgleichung der Wurfparabel in einem Koordinatensystem mit dem Ursprung N und waagrechter x-Achse.



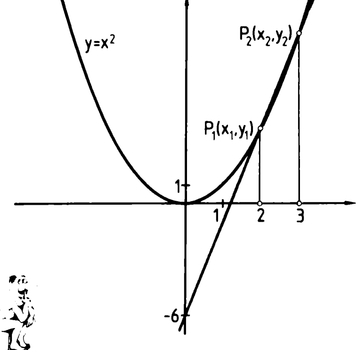


118. Um die Gleichung $x^2 - 5x + 6 = 0$ zu lösen, zeichnet ein Schüler die „Normalparabel" $y = x^2$ und die Gerade $y = 5x - 6$.

Die x-Werte der Schnittpunkte dieser beiden Kurven¹) sind $x_1 = 2$ bzw. $x_2 = 3$ — also die Lösungen der Gleichung $x^2 - 5x + 6 = 0$.

a) Ist das Zufall? (Begründung!)

b) Wie ist vorzugehen, um die Gleichung $x^2 + x - 6 = 0$ auf analogem Wege zu lösen?





3. Problemstellungen der Physik

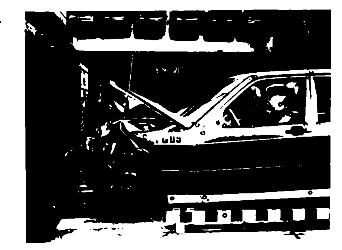
Die nachstehenden Physikaufgaben fallen außerhalb des eigentlichen Mathematiklehrstoffes. Eine Abstimmung auf den Physikunterricht ist unbedingt notwendig. ($g = 10\,m/s^2$)

119. Ein Stein wird mit einer Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 16\,m/s$ senkrecht nach oben geworfen. Nach welcher Zeit befindet sich der Stein in einer Höhe von $s = 9\,m$?

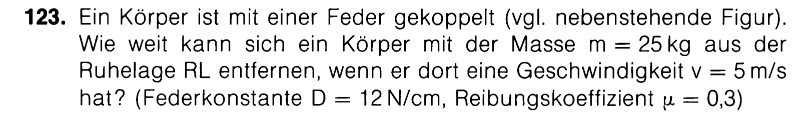
120. Eine Gewehrkugel wird mit einer Laufaustrittsgeschwindigkeit $v_0 = 100\,m/s$ senkrecht nach oben geschossen. Mit welcher Geschwindigkeit v trifft sie auf ein Hindernis in $s = 50\,m$ Höhe?

121. Ein Kraftfahrzeug beschleunigt von $v_0 = 10\,m/s$ gleichmäßig mit $a = 3{,}5\,m/s^2$. Welche Geschwindigkeit wird nach $s = 50\,m$ erreicht?

Anleitung: Man berechne zuerst die Zeit, in welcher 50 m zurückgelegt werden.

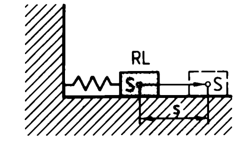


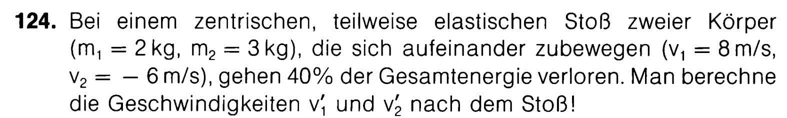
122. Rekonstruktion eines Unfalles:



Ein Kraftfahrzeug prallte mit $v = 20\,km/h$ gegen ein Hindernis. Wie groß war die Geschwindigkeit v_0 zu Beginn der Bremsung, wenn der Bremsweg $s = 20\,m$ war und eine gleichförmige Verzögerung von $a = -7\,m/s^2$ angenommen werden kann?

123. Ein Körper ist mit einer Feder gekoppelt (vgl. nebenstehende Figur). Wie weit kann sich ein Körper mit der Masse $m = 25\,kg$ aus der Ruhelage RL entfernen, wenn er dort eine Geschwindigkeit $v = 5\,m/s$ hat? (Federkonstante $D = 12\,N/cm$, Reibungskoeffizient $\mu = 0{,}3$)





124. Bei einem zentrischen, teilweise elastischen Stoß zweier Körper ($m_1 = 2\,kg$, $m_2 = 3\,kg$), die sich aufeinander zubewegen ($v_1 = 8\,m/s$, $v_2 = -6\,m/s$), gehen 40% der Gesamtenergie verloren. Man berechne die Geschwindigkeiten v_1' und v_2' nach dem Stoß!

Bemerkung: Das Vorzeichen von v_1 bzw. v_2 gibt die Richtung an.

¹) Der Begriff der Kurve ist in der Mathematik weit gefaßt: auch eine Gerade ist eine Kurve.